



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

15 februarie 2015

Clasa a V-a

1. Numerele naturale m și n au proprietatea că $(2^m + 7^n)$ se divide cu 5.

Arătați că numărul $(2^n + 7^m)$ se divide cu 5.

2. Determinați mulțimea:

$$M = \{\overline{abc} \mid a \cdot \overline{bc} \text{ și } b \cdot \overline{ac} \text{ sunt numere consecutive}\}.$$

3. Se consideră numărul:

$$A = 1 + 2015 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}.$$

- a) Arătați că numărul $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015$ este pătrat perfect.
- b) Arătați că numărul $b = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2$ este cub perfect.
- c) Arătați că A este pătrat perfect și cub perfect.

4. Determinați numerele naturale a și b care verifică relația: $a^4 + 5a + 1 = 5^b$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu)
- Timp de lucru: 2 ore

Soluții clasa a V-a:

1. Notăm: $A = 2^m + 7^n$, $B = 2^n + 7^m$.

Dacă un număr p se divide cu 5, atunci ultima sa cifră $u(p)$ va fi 0 sau 5.
Arătăm că dacă

$u(2^m + 7^n) \in \{0, 5\}$, atunci și $u(2^n + 7^m) \in \{0, 5\}$.

Cazul I ($m \in \mathbb{N}^*$)

Dar $u(2^k) = \{2, 4, 6, 8\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, iar $u(7^k) = \{1, 3, 7, 9\}, \forall k \in \mathbb{N}$. Ultima cifră $u(n)$:

k	$u(2^k)$	$u(7^k)$
$M4$	6	1
$M4+1$	2	7
$M4+2$	4	9
$M4+3$	8	3

Din condiția $u(2^m + 7^n) \in \{0, 5\}$, cu $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (2^m + 7^n)$ impar, deci $u(2^m + 7^n) = 5$.

Cazurile convenabile:

1. (6+9) pentru ($m = M4, n = M4 + 2$);
2. (2+3) pentru ($m = M4 + 1, n = M4 + 3$);
3. (4+1) pentru ($m = M4 + 2, n = M4$);
4. (8+7) pentru ($m = M4 + 3, n = M4 + 1$).

În toate aceste cazuri ultima cifră a numărului B este $u(2^n + 7^m) = 5$.

Cazul II ($m = 0$)

Pentru $m = 0$, exercițiul se mai scrie:

Dacă $A = 1 + 7^n$ se divide cu 5, atunci $B = 2^n + 1$ se divide cu 5.

Din $(1 + 7^n) : 5 \Rightarrow n = M4 + 2$, iar $(2^{M4+2} + 1) : 5$, adică concluzia în cazul $m = 0$.

2. I. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$, de unde obținem

$c \cdot (a - b) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru

$c = 1, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $a = b + 1$.

II. Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$, de unde obținem

$c \cdot (b - a) = 1$. Ultima egalitate este adevărată pentru

$c = 1, a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $b = a + 1$. În concluzie:

$M = \{121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891, 211, 321, 431, 541, 651, 761, 871, 981\}$.

3.a) $a = 1 + 2014 + 2014 \cdot 2015 = 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015 \cdot (1 + 2014) = 2015^2$.

b) $b = 1 + 2014 + 2015 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2015^2 \Rightarrow b = 2015^2 + 2014 \cdot 2015^2 = 2015^2 \cdot (1 + 2014)$.

Adică $b = 2015^3$.

c) $A = 2016 + 2015 \cdot 2016 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$

$$A = 2016(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$$

$$A = 2016^2 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$$

$$A = 2016^2(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$$

$$A = 2016^3 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$$

.....

$$A = 2016^{2015} + 2015 \cdot 2016^{2015} = 2016^{2015}(1 + 2015) = 2016^{2016},$$

$$2016 = 3 \cdot 372, 2016 = 2 \cdot 1008; A = 2016^{672 \cdot 3}, A = 2016^{1008 \cdot 2}, \text{ deci } A \text{ este pătrat perfect}$$

și cub perfect.

4. Relația este echivalentă cu: $a^4 + 5a = 5^b - 1$.

Notăm $u(n)$ = ultima cifră a numărului n .

Atunci $u(n^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Rezultă $u(n^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$.

Deci $u(a^4 + 5a) \in \{0, 1, 5, 6\}$. Dar $u(5^b - 1) \in \{0, 4\}$. Egalitatea are loc numai dacă $b = 0$.

În acest caz relația devine $a^4 + 5a = 0$, a cărei singură soluție naturală este $a = 0$.

Deci, singura soluție este $a = b = 0$.

Barem de corectare

Clasa a V-a

Problema 1	Oficiu 1 p
Un număr p se divide cu 5, atunci ultima sa cifră $u(p) \in \{0, 5\}$.	1p
Cazul I ($m \in \mathbb{N}^*$)	
$u(2^k) = \{2, 4, 8, 6\}, \forall k \in \mathbb{N}^*$, iar $u(7^k) = \{1, 7, 9, 3\}, \forall k \in \mathbb{N}$	1p
Din condiția $u(2^m + 7^n) \in \{0, 5\}$, cu $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (2^m + 7^n)$ impar, deci $u(2^m + 7^n) = 5$	1p
(6+9) pentru ($m = M4, n = M4 + 2$) $\Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(2+3) pentru ($m = M4 + 1, n = M4 + 3$) $\Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(4+1) pentru ($m = M4 + 2, n = M4$) $\Rightarrow u(B) = 5$;	1p
(8+7) pentru ($m = M4 + 3, n = M4 + 1$) $\Rightarrow u(B) = 5$.	1p
Cazul II ($m = 0$)	2p
TOTAL	10p

Problema 2	Oficiu 1p
I. Dacă $a \cdot \overline{bc} > b \cdot \overline{ac}$, atunci $a \cdot \overline{bc} - b \cdot \overline{ac} = 1$	1p
$c \cdot (a - b) = 1$	1p
$c = 1, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $a = b + 1$.	1p
II. Dacă $b \cdot \overline{ac} > a \cdot \overline{bc}$, atunci $b \cdot \overline{ac} - a \cdot \overline{bc} = 1$	1p
$c \cdot (b - a) = 1$	1p
$c = 1, a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ și $b = a + 1$	1p
$M =$	3p
$= \{121, 231, 341, 451, 561, 671, 781, 891, 211, 321, 431, 541, 651, 761, 871, 981\}$	
TOTAL	10p

Problema 3	Oficiu	1 p
3.a) $a = 2015 + 2014 \cdot 2015 = 2015 \cdot (1 + 2014) = 2015^2$.		2p
b) $b = 2015^2 + 2014 \cdot 2015^2 = 2015^2 \cdot (1 + 2014) = 2015^3$		2p
c) $A = 2016(1 + 2015) + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$		1p
$A = 2016^2 + 2015 \cdot 2016^2 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$		1p
$A = 2016^3 + 2015 \cdot 2016^3 + \dots + 2015 \cdot 2016^{2015}$		1p
.....		
$A = 2016^{2015} + 2015 \cdot 2016^{2015} = 2016^{2015}(1 + 2015) = 2016^{2016}$		1p
Finalizare		1p
TOTAL		10p

Problema 4	Oficiu	1 p
$a^4 + 5a = 5^b - 1$		1p
$u(n^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$		2p
$u(n^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$		2p
$u(a^4 + 5a) \in \{0, 1, 5, 6\}$		2p
$u(5^b - 1) \in \{0, 4\}$		1p
Finalizare: $a = 0, b = 0$		1p
TOTAL		10p